Inferência Estatística II

Solução da 1ª Prova - 07/04/2014

1ª Questão:

1. Já vimos que a família de distribuições $U[0,\theta]$ admite razão de verossimilhanças monótona na estatística $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Logo, o teste UMP para testar $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$ rejeitará H_0 quando $Y < c$ para algum c.

2. Substituindo os valores temos que p-valor $= \sup_{\theta \geq \theta_0} P(Y < c \mid \theta)$ onde c é o valor observado de Y.

   Mas $P(Y < c \mid \theta) = P(X_i < c, \forall i \mid \theta) = [P(X_i < c \mid \theta)]^n = \left(\frac{c}{\theta}\right)^n$

   Como $n = 4$, $c = 25$ temos p-valor $= \sup_{\theta \geq 30} \left(\frac{25}{\theta}\right)^4 = \left(\frac{25}{30}\right)^4$

2ª Questão:

1. A RVM é $\lambda(X) = \dfrac{\sup_{p=0,5} P(X \mid p)}{\sup_p P(X \mid p)} = \dfrac{P(X \mid 0,5)}{P(X \mid X/n)} = \dfrac{\binom{n}{X}(0,5)^X (0,5)^{n-X}}{\binom{n}{X}\left(\frac{X}{n}\right)^X \left(1-\frac{X}{n}\right)^{n-X}}$

   $= \left(\frac{0,5n}{X}\right)^X \left(\frac{0,5n}{n-X}\right)^{n-X} = \left(\frac{n-X}{X}\right)^X \left(\frac{0,5n}{n-X}\right)^n$. Como $n=6$, $\lambda(X) = \left(\frac{6-X}{X}\right)^X \left(\frac{3}{6-X}\right)^6$.

2. O teste da RVM rejeita H_0 quando $\lambda(X) < c$, para algum c.

   Substituindo os valores temos $\lambda(0) = \lambda(6) = (1/2)^n$ *

   $\lambda(1) = \lambda(5) = 5 \cdot (3/5)^6$

   $\lambda(2) = \lambda(4) = 4\,(3/4)^6$

   $\lambda(3) = 1$

   > * a conta de $\lambda(0) = \lambda(6)$ deve ser feita diretamente de $P(X \mid 0) = P(X \mid 1) = 1$

   Logo, temos $\lambda(0) < \lambda(1) < \lambda(2) < \lambda(3)$. Assim, o teste deve rejeitar H_0 quando $|X - 3| > k$.

3. O nível do teste é $\alpha = P(|X-3| > k \mid p = 0,5)$

   Se $k = 0$, $\alpha = P(|X-3| > 0 \mid p = 0,5) = 1 - P(X = 3 \mid p = 0,5) = 1 - \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{16}$

   Se $k = 1$, $\alpha = P(|X-3| > 1 \mid p = 0,5) = 1 - P(X \in \{2,3,4\} \mid p = 0,5) = 1 - \left[2\binom{6}{2} + \binom{6}{3}\right] \cdot \frac{1}{2^6} = 7/32$

   Se $k = 2$, $\alpha = P(|X-3| > 2 \mid p = 0,5) = P(X \in \{0,6\} \mid p = 0,5) = \frac{1}{32}$

3ª Questão:

1. Os níveis do T1 e T2 são 0,2.
   O nível de T3 é aproximadamente 0,1.

2. O teste T1 não é viciado pois $\pi(\theta) > \pi(6)$, $\forall \theta \neq 6$.
   O teste T3 não é viciado pois $\pi(\theta) > \pi(6)$, $\forall \theta \neq 6$
   O teste T2 é viciado pois $\pi(\theta) < \pi(6)$, para $\theta \in [4,6]$.

4ª Questão:

1. $\sup\limits_{\mu \leq \mu_0} P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma^*} > z_\alpha \,\middle|\, \mu\right)$ é o nível do teste

Mas $\bar{X}\,|\,\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, Logo, $\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\,|\,\mu \sim N(0,1)$

Assim, $\sup\limits_{\mu \leq \mu_0} P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma^*} > z_\alpha \,\middle|\, \mu\right) = \sup\limits_{\mu \leq \mu_0} P\left(\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} z_\alpha \,\middle|\, \mu\right)$

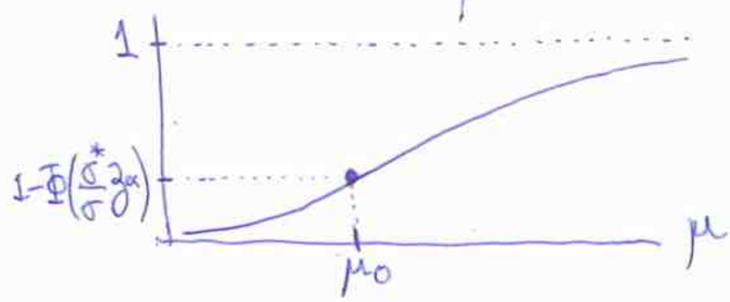
$= \sup\limits_{\mu \leq \mu_0} P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) + \frac{\sigma^*}{\sigma} z_\alpha \,\middle|\, \mu\right)$

$= \sup\limits_{\mu \leq \mu_0} P\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + \frac{\sigma^*}{\sigma} z_\alpha\right) = 1 - \sup\limits_{\mu \leq \mu_0} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + \frac{\sigma^*}{\sigma} z_\alpha\right)$

Como o supremo é atingido para $\mu = \mu_0$, o nível do teste será dado por $1 - \Phi\left(\frac{\sigma^*}{\sigma} z_\alpha\right)$.

2. $\pi(\mu) = P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma^*} > z_\alpha \,\middle|\, \mu\right)$
$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu) + \frac{\sigma^*}{\sigma} z_\alpha\right)$,
pelas contas do item anterior.

Gráfico de $\pi(\mu)$



3. Como σ é desconhecido, o teste correto de nível α rejeita H_0 quando $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S > t_{n-1,\alpha}$. Esse teste tem nível α pois $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S\,|\,\mu=\mu_0 \sim t_{n-1}(0,1)$. O poder do teste é
$\pi(\mu) = P\left(\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S} > t_{n-1,\alpha} \,\middle|\, \mu\right) = P(T > t_{n-1,\alpha})$ onde $T \sim t_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu-\mu_0), 1\right)$.