Calculo das Probabilidades II - 2015/1

Solução da 1ª Prova

1ª Questão:

a) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, se $-1 \leq x \leq 1$

e $f(x) = 0$, c.c. Analogamente, por simetria, $f(y) = \begin{cases} 2\sqrt{1-y^2}/\pi, & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$

b) $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{, se } -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$

Analogamente, por simetria, $f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & \text{, se } -\sqrt{1-y^2} \leq y \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$

c) $P(X<0{,}5 | Y=y) = \int_{-\infty}^{0,5} f(x|y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0,5} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,dx = \frac{0{,}5+2\sqrt{1-y^2}}{2\sqrt{1-y^2}}$,

se $0{,}5 < \sqrt{1-y^2}$, isto é, se $|y| < \sqrt{0{,}75}$.

Se $\sqrt{0{,}75} < |y| < 1 \Rightarrow P(X<0{,}5|Y=y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,dx = 1$

Se $|y| > 1$, $P(X<0{,}5|Y=y)$ não pode ser calculada

2ª Questão:

(a) Como os Y_i's são discretas, a distribuição de $(Y_1,\dots,Y_n)$ pode ser caracterizada pela f.p. conjunta $f(y_1,\dots,y_n)$, dada por

$f(y_1,\dots,y_n) = \int f(y_1,\dots,y_n,x)\,dx = \int f(y_1,\dots,y_n|x)\,f(x)\,dx$

Mas $f(y_1,\dots,y_n|x) = \prod_{i=1}^{n} g(y_i|x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x}\frac{x^{y_i}}{y_i!} = e^{-nx}\frac{x^{\Sigma y_i}}{\prod y_i!}$, pela independ. condicional

Logo, $f(y_1,\dots,y_n) = \int_0^{\infty} e^{-nx}\frac{x^{\Sigma y_i}}{\prod y_i!}\cdot 2e^{-2x}\,dx = \frac{2}{\prod y_i!}\int x^{\Sigma y_i}\cdot e^{-(2+n)x}\,dx$

$= \frac{2}{\prod y_i!}\cdot\frac{\Gamma(\Sigma y_i+1)}{(2+n)^{\Sigma y_i+1}}$, se $y_i = 0,1,2,\dots,\forall i$, e $f(y_1,\dots,y_n)=0$, c.c.

Como não é possível fatorar a expressão de $f(y_1,\dots,y_n)$ em $h_1(y_1),\dots,h_n(y_n)$, os Y_i's não são independentes.

(b) Como X é contínua, a distr. de $X|Y_1=y_1,\dots,Y_n=y_n$ pode ser caracterizada pela densidade condicional $g(x|y_1,\dots,y_n)=\dfrac{f(y_1,\dots,y_n,x)}{f(y_1,\dots,y_n)}$

$$= e^{-nx}\,\frac{x^{\Sigma y_i}}{\Pi y_i!}\cdot 2e^{-2x} \Big/ \frac{2\,\Gamma(\Sigma y_i+1)}{\Pi y_i!\,(2+n)^{\Sigma y_i+1}} = \frac{\Gamma(\Sigma y_i+1)}{(2+n)^{\Sigma y_i+1}}\cdot x^{\Sigma y_i}\, e^{-(2+n)x},\ x\geq 0$$

e $g(x|y_1,\dots,y_n)=0$, se $x<0$, isto é, $X|Y_1=y_1,\dots,Y_n=y_n \sim G(\Sigma y_i+1,\ 2+n)$.

(c) $P(Y_1=\dots=Y_n|X=x)=\sum_y P(Y_1=\dots=Y_n=y|X=x)=\sum_y P(Y_1=y|X=x)\dots P(Y_n=y|X=x)$

$$=\sum_y\left[e^{-x}\frac{x^y}{y!}\right]^n = e^{-nx}\cdot\sum_{y=0}^{\infty}\frac{x^{ny}}{(y!)^n}$$

$$P(Y_1=\dots=Y_n)=\sum_y P(Y_1=\dots=Y_n=y)=\sum_y f(y,\dots,y)=\sum_y\frac{2}{(y!)^n}\cdot\frac{\Gamma(ny+1)}{(2+n)^{ny+1}}$$

3ª Questão:

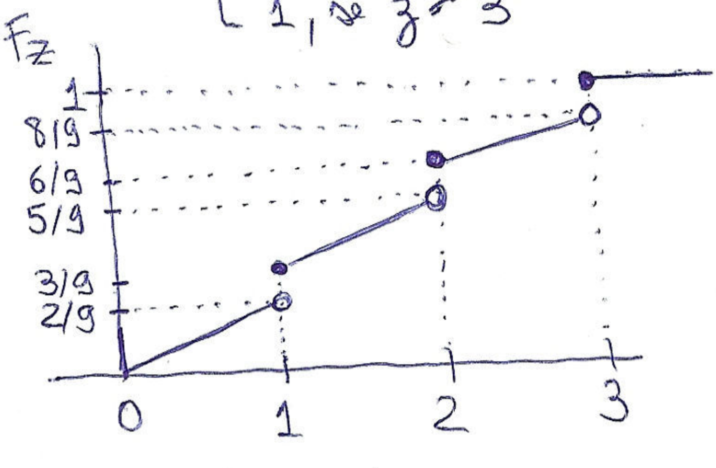
(a) $F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(Z\leq z \text{ e } Z=X)+P(Z\leq z \text{ e } Z=Y)$

$$=P(Z\leq z|Z=X)\,P(Z=X)+P(Z\leq z|Z=Y)\cdot P(Z=Y)$$

$$=P(X\leq z)\cdot\frac{1}{3}+P(Y\leq z)\cdot\frac{2}{3}=F_X(z)\cdot\frac{1}{3}+F_Y(z)\cdot\frac{2}{3}$$

onde $F_X(z)=\begin{cases}0, & \text{se } z<1\\ 1/3, & \text{se } 1\leq z<2\\ 2/3, & \text{se } 2\leq z<3\\ 1, & \text{se } z\geq 3\end{cases}$ e $F_Y(z)=\begin{cases}0, & \text{se } z<0\\ z/3, & \text{se } 0\leq z\leq 3\\ 1, & \text{se } z\geq 3\end{cases}$

Logo, $F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{se } z<0\\ 2z/9, & \text{se } 0\leq z<1\\ \frac{1}{9}+\frac{2z}{9}, & \text{se } 1\leq z<2\\ \frac{2}{9}+\frac{2z}{9}, & \text{se } 2\leq z<3\\ 1, & \text{se } 3\leq z\end{cases}$



(b) $P(Z<2)=F_Z(2^-)=2/9$, como fica claro da figura acima

$$P(Z>1)=1-P(Z\leq 1)=1-F_Z(1)=1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$$

4ª Questão:

(a) $Y = \pi X^2$ e tem f.d. G

Logo, $G(y) = P(Y \leqslant y) = P(\pi X^2 \leqslant y) = P\left(-\sqrt{\frac{y}{\pi}} \leqslant X \leqslant \sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)$

Como os valores possíveis de X são $[0,1]$, $G(y) = P\left(X \leqslant \sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)$

$$P\left(X \leqslant \sqrt{\frac{y}{\pi}}\right) = \int_{-\infty}^{\sqrt{y/\pi}} f(x)dx = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{y/\pi}} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{\sqrt{y/\pi}} = \frac{y}{\pi}, & \text{se } 0 \leqslant \frac{y}{\pi} \leqslant 1 \\ \int_0^1 2x\,dx + \int_0^{\sqrt{y/\pi}} 0.dx = 1, & \text{se } \frac{y}{\pi} > 1 \end{cases}$$

Logo, $G(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ y/\pi, & \text{se } y \in [0,\pi] \\ 1, & \text{se } y > \pi \end{cases}$

(b) $g(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{se } y \in [0,\pi] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow Y \sim U[0,\pi].$