Cálculo das Probabilidades II - 1º Semestre de 2015

Solução da 2ª Prova

1ª Questão:

$U = X/V \Rightarrow X = UV$ e $V = X+Y = UV + Y \Rightarrow Y = V - UV = V(1-U)$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) $$J = \begin{vmatrix} \partial X/\partial U & \partial X/\partial V \\ \partial Y/\partial U & \partial Y/\partial V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & U \\ -V & 1-U \end{vmatrix} = V(1-U) - (-V)U = V - UV + UV = V$$

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)).|J| = \begin{cases} e^{-(uv + v(1-u))} v \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} v e^{-v}, & uv \geq 0 \text{ e } v(1- \\ 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} v e^{-v}.1, & v \geq 0 \text{ e } 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) Como a densidade conjunta $g(u,v)$ fatora em $g_V(v) = \begin{cases} v e^{-v}, & v \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

e $g_U(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$, U e V são independentes com densidades marginais $g_U(u)$ e $g_V(v)$.

(c) $$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, g_U(u)\, du = \int_0^1 u.1\, du = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v\, g_V(v)\, dv = \int_0^{\infty} v^2 e^{-v}\, dv = \frac{\Gamma(3)}{1^3} = 2$$, usando dado da 3ª Q.

2ª Questão:

a) $E(Z) = E(X - 2Y + 1) = E(X) - 2E(Y) + 1 = 1 - 2.2 + 1 = -2$

$V(Z) = V(X - 2Y + 1) = V(X) + (-2)^2 V(Y) + 2(-2)\text{Cov}(X,Y) = 3 + 4.4 + 0 = 19$

b) $E(Z) = -2$, pelo item anterior

$V(Z) = V(X) + (-2)^2 V(Y) - 4\,\text{Cov}(X,Y) = 3 + 4.4 - 4.0{,}5.\sqrt{3}.\sqrt{4} = 19 - 4\sqrt{3}$

3ª Questão:

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)\,f(x)}{f(y)} = \frac{[e^{-x}x^y/y!]\,e^{-x}}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx} = \frac{e^{-2x}x^y/y!}{\int_0^{\infty}(e^{-2x}x^y/y!)\,dx} = \frac{e^{-2x}x^y/y!}{\Gamma(y+1)/(y!\,2^{y+1})}$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{y+1}}{\Gamma(y+1)} \cdot x^{(y+1)-1} e^{-2x}, & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$ e, portanto $X|Y=y \sim G(y+1, 2)$.

(a) $E(X|Y=y) = \frac{y+1}{2}$ e $V(X|Y=y) = \frac{y+1}{2^2} = \frac{y+1}{4} \Rightarrow E(X|Y) = \frac{Y+1}{2}$ e $V(X|Y) = \frac{Y+1}{4}$

(b) Da solução acima, vimos que $f(y) = \begin{cases} \Gamma(y+1)/(y!\,2^{y+1}) = 1/2^{y+1} & , y=0,1,2,\dots \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$

Logo, $P(E(X|Y)>1) = P\left(\frac{Y+1}{2}>1\right) = P(Y>1) = 1-[P(Y=0)+P(Y=1)] = 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ e

$P(V(X|Y)>1) = P\left(\frac{Y+1}{4}>1\right) = P(Y>3) = 1-[P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)] =$

$= 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}$

4ª Questão

(a) Sabemos que os valores possíveis de Y_n são $[0,1]$. Logo, $F_n(x) = \begin{cases} 1, & x>1 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

Suponha $0 \leq x \leq 1$:

$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(X_i \leq x, \forall i) \overset{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) \overset{\text{i.d.}}{=} [P(X_i \leq x)]^n = x^n$

Assim $F_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^n, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x<0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 0, & \text{se } x<1 \end{cases}$

(b) $Y_n \xrightarrow{d} c$ se $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq c \\ 0, & \text{se } x<c \end{cases} \Rightarrow$ Como $F_n(x)$ converge para tal função com $c=1$, $\{Y_n\}$ converge em distribuição para 1.

(c) O candidato natural para a constante c é $c=1$.

Logo, vamos calcular $P(|Y_n-1|>\varepsilon)$, $\forall \varepsilon>0$

$P(|Y_n-1|>\varepsilon) = P(Y_n<1-\varepsilon \text{ ou } Y_n>1+\varepsilon) = P(Y_n<1-\varepsilon)+P(Y_n>1+\varepsilon)$

$= F_n(1-\varepsilon)+(1-F_n(1+\varepsilon)) = (1-\varepsilon)^n+(1-1) = (1-\varepsilon)^n$

Assim, $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n-1|>\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n = 0$ e $\{Y_n\}$ converge em probabilidade para 1.