12 de fevereiro de 2014 *Duração: 2 horas*

Exame de Seleção 2014
Pós-graduação em Estatística
Departamento de Métodos Estatísticos - UFRJ

1. Seja X a variável aleatória que conta o número de repetições independentes do ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade p, até a ocorrência do primeiro sucesso (isto é, a primeira ocorrência do valor 1). Seja k um inteiro não negativo. Mostre que para cada inteiro $t \geqslant 1$,
$$\Pr(X = k + t | X > k) = \Pr(X = t).$$

2. Um sistema eletrônico possui $n \geqslant 1$ resistores ligados em paralelo e o sistema só para de funcionar quando todos os resistores queimarem. Suponha que o tempo de vida de cada resistor possa ser modelado por uma variável aleatória uniforme no intervalo 0 e 10.000 horas, e que os tempos de vida dos resistores sejam estocasticamente independentes. Qual é o número mínimo de resistores que deverão ser ligados em paralelo para que o tempo esperado do sistema parar de funcionar seja maior ou igual a 8.000 horas? (Dica: Primeiro calcule a função de distribuição da variável aleatória Y que representa o tempo até o sistema parar de funcionar. Use o resultado para encontrar a função de densidade e depois calcule o valor esperado.)

3. Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ constantes. Sejam também U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, variáveis aleatórias uniformes no intervalo 0 e 1 (i.e. $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$), e independentes. Considere a transformada $Y = \left[-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - U_i)\right]^{1/\alpha}$.
   - (a) Seja $V_i = 1 - U_i$. Mostre que $V_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ e são independentes para $i = 1, \ldots, n$.
   - (b) Mostre que se $V_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$, então $-(1/\beta)\ln(V_i)$ tem distribuição exponencial com parâmetro β (média $1/\beta$), e independentes para $i = 1, \ldots, n$.
   - (c) Use o fato que soma de exponenciais com parâmetro β e independentes tem distribuição gama para encontrar a densidade de Y.

   Dica: Sejam $\theta > 0$ e $\eta > 0$ constantes. A função de densidade de probabilidade de $X \sim \text{Gama}(\theta, \eta)$ é
   $$f_X(x) = \frac{\eta^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} \exp\{-\eta x\}, \text{ se } x \geqslant 0 \quad \text{e} \quad f_X(x) = 0, \text{ se } x < 0.$$

4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por
$$f(x, y) = \begin{cases} c, & \text{se} \quad |x| + |y| \leqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   - (a) Determine o valor de c.
   - (b) Calcule $\Pr(|X| - 1/2 > Y)$.
   - (c) Encontre a função de distribuição acumulada de Y.