Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Estatística
Exame de Seleção 2017
15/02/2017 **Duração: 2 horas**

1. Em uma caixa há três moedas. Uma delas é honesta, uma tem probabilidade igual a 3/4 de dar cara e uma tem probabilidade igual a 1 de dar cara.
   (a) Uma moeda selecionada ao acaso é lançada e observa-se que o resultado é cara. Qual é a probabilidade *a posteriori* dela ser cada uma das três moedas?
   (b) Se esta mesma moeda for lançada mais três vezes, qual é a probabilidade de que ocorra no máximo uma cara?

2. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com função de densidade de probabilidade
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   (a) Sejam Y_1 e Y_2 variáveis aleatórias definidas como o número inteiro mais próximo de X_1 e X_2, respectivamente. Determine a função de probabilidade conjunta de (Y_1, Y_2).
   (b) Defina
$$Z = \begin{cases} 1, & \text{se } Y_1 + Y_2 \text{ é par} \\ 0, & \text{se } Y_1 + Y_2 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$
   As variáveis aleatórias Y_1 e Z são independentes? Justifique.

3. Um ponto é selecionado aleatoriamente dentro do triângulo formado pelos vértices $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Sejam X e Y variáveis aleatórias representando as coordenadas selecionadas (abcissa e ordenada, respectivamente).
   (a) Determine a função de densidade de probabilidade conjunta de (X, Y).
   (b) Determine função de densidade de probabilidade marginal de Y, sua função de distribuição acumulada e esboce seus gráficos.
   (c) Determine $E(X \mid Y)$ e, a partir dela, calcule $E(X)$.

4. Um exame é realizado em duas etapas: uma com questões de múltipla escolha e uma com questões dissertativas, que devem ser feitas nesta ordem pelos candidatos, uma etapa imediatamente após a outra. Assuma que o tempo de conclusão da primeira etapa do exame, X_1, e o tempo de conclusão de todo o exame, X_2, (em horas) têm a mesma distribuição para qualquer candidato e função de densidade de probabilidade conjunta
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2(x_1 + x_2), & 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   (a) Determine a função de densidade de probabilidade conjunta do tempo de conclusão da primeira etapa e do tempo de conclusão da segunda etapa do exame.
   (b) Qual é a probabilidade de que um candidato leve mais tempo para concluir a primeira etapa que a segunda?
   (c) Suponha que haja 100 candidatos e que seus tempos de conclusão do exame sejam independentes. Calcule uma aproximação para a probabilidade de que o tempo médio de conclusão do exame destes candidatos seja menor que 45 minutos.