Exame de Seleção 2018
Pós-graduação em Estatística
Departamento de Métodos Estatísticos - UFRJ

1. Uma gaveta contem meias vermelhas e brancas. Quando duas meias são selecionadas aleatoriamente (sem reposição), a probabilidade que ambas sejam vermelhas é 1/2.

   (a) Qual deve ser o menor número de meias vermelhas e meias brancas na gaveta?

   (b) Qual deve ser o menor número de meias vermelhas e meias brancas na gaveta se o número de meias brancas é par?

2. Quando os consumidores abastecem seus carros em determinado posto de gasolina situado à beira de uma estrada, eles sempre aproveitam para fazer também uma refeição no restaurante *self-service* desse posto. Cada vez que isso acontece: (1) O carro só é abastecido com um tipo de combustível, a saber, só com gasolina ou só com álcool. (2) 70% dos carros usam gasolina e 30% usam álcool. Seja $W \sim \text{Bernoulli}(p)$, com $p = 0,7$, em que $W = 1$ corresponde a gasolina e $W = 0$ corresponde a álcool. (3) A quantidade X de combustível em litros (de gasolina ou de álcool) colocada no tanque do veículo é Normal com média $\mu_X = 30$ e desvio padrão $\sigma_X = 10$. (4) O preço da gasolina é $\alpha = 4$ reais/litro e o preço do álcool é $\beta = 3$ reais/litro. (5) A quantidade Y de comida, em quilos, consumida em uma refeição no restaurante é Normal com média $\mu_Y = 0,5$ e desvio padrão $\sigma_Y = 0,2$. (6) O preço da comida no restaurante é $\gamma = 30$ reais/quilo. (7) Há independência entre as variáveis aleatórias W, X e Y. Então, $T = [\alpha W + \beta(1 - W)]X + \gamma Y$ é o montante dos gastos em reais, com combustível e com alimentação, durante uma parada nesse posto de um consumidor selecionado aleatoriamente. Calcule:

   (a) A distribuição da despesa total T, dado que o carro é abastecido com gasolina

   (b) A distribuição da despesa total T, dado que o carro é abastecido com álcool.

   (c) A média e o desvio padrão dessa despesa total T (sem separar pelo tipo de combustível).

3. Suponha que $X \sim \chi^2_n$ e $Y \sim \chi^2_m$, independentes, para n e m inteiros positivos. Encontre a função de densidade de probabilidade de $W = \dfrac{X/n}{Y/m}$.

   Dica: $X \sim \chi^2_n \equiv \text{Gama}(\alpha, \beta)$, para $\alpha = n/2$ e $\beta = 1/2$ e $f_X(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\} I_{[0,\infty)}(x)$.

4. Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que X_i tenha distribuição uniforme contínua no intervalo $[0, \theta]$, isto é, $X_i \sim U(0, \theta)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Defina $Y_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ a sequência dos máximos das variáveis aleatórias X_i, i=1,…,n. Mostre que Y_n converge em probabilidade para θ (quando n tende ao infinito).