

Exame de Seleção 2003
Mestrado em Estatística
IM-UFRJ

07 - 02 - 2003

Duração: 2 horas

Leia atentamente o enunciado das questões antes de responder.

Boa Sorte

*** 1ª Questão: Em um dado dia, uma máquina de circuitos integrados pode estar operando em um de três níveis de qualidade produzindo 1%, 5% ou 10% de circuitos defeituosos. Em 50% dos dias ela opera produzindo 1% de defeituosos, em 30% dos dias o número de defeituosos é de 5% e em 20% dos dias o nível de defeituosos é de 10%. Ao final de um determinado dia, uma amostra aleatória de 10 circuitos é obtida e inspecionada. Se um item defeituoso é encontrado, qual a probabilidade da máquina ter operado naquele dia ao nível de 1% de defeituosos?

2ª Questão: Diz-se que uma v.a. X tem distribuição exponencial com parâmetro λ se sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- a) Qual o valor esperado de X ?
- b) Qual a variância de X ?
- c) Mostre que a distribuição exponencial não tem memória, ou seja, para todo $s > 0$ e $t > 0$, $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$.
- d) Mostre que se U tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, então $Y = -\lambda^{-1} \ln U$ tem distribuição exponencial com parâmetro λ .

3ª Questão: Uma moeda honesta é lançada n vezes, e seja \hat{p}_n a proporção de caras obtidas.

- a) Use a desigualdade de Chebyshev para encontrar um valor de n tal que a probabilidade de \hat{p}_n pertencer ao intervalo $(0, 4; 0, 6)$ seja maior ou igual a 0,9.
- b) Use o Teorema Central do Limite para encontrar o valor de n tal que a probabilidade de \hat{p}_n pertencer ao intervalo $(0, 4; 0, 6)$ seja aproximadamente igual a 0,9.
- d) Como você explica a diferença entre os valores obtidos nos itens a e b?

divido 4ª Questão: Sabe-se que a função de densidade de probabilidade de X , o índice de resistência de uma placa de aço, é:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^5 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Por um problema no método de medição do índice de resistência, a medição Y só assume valores maiores ou iguais a 0,6, ou seja, Y é igual a X se $X > 0,6$ e Y é igual a 0,6 caso contrário.

- a) Qual o valor de c ?
- b) Qual a função de distribuição de Y ?
- d) Se o preço da placa de aço é $R = 1000Y$, qual o seu valor esperado?