

Exame de Seleção 2004  
Pós-Graduação em Estatística  
IM-UFRJ

05 - 02 - 2004

Duração: 2 horas

Leia atentamente o enunciado das questões antes de responder.

Boa Sorte

*anônimo* 1. Uma empresa controla o acesso de funcionários a uma área restrita através de cartões com tarja magnética e senhas. Cada um dos  $k$  funcionários recebe um cartão magnético (anônimo) e escolhe uma senha com  $n$  dígitos que é vinculada a seu cartão (cada dígito é um algarismo de 0 a 9 e são permitidas repetições).

- (a) Quantas são as possíveis senhas?
- (b) Qual a probabilidade de que pelo menos dois funcionários cadastrem a mesma senha?

Suponha que os cartões sejam embaralhados e redistribuídos aleatoriamente. Seja Pedro um funcionário.

- (c) Qual a probabilidade de que Pedro consiga entrar na área restrita usando sua própria senha e o cartão que recebeu na segunda distribuição?
- (d) Se Pedro conseguiu entrar com sua senha, qual a probabilidade de ter recebido o mesmo cartão que recebera antes?

2. Suponha que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias com densidade conjunta uniforme na região do plano limitada pelas retas  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = x + 1$  e  $y = x - 1$ . Determine:

- (a) a função densidade conjunta de  $X$  e  $Y$ ;
- (b) a função densidade marginal de  $Y$ ;

*anônimo* (c)  $E(X|Y)$ .  $\rightarrow$  provar  $E(X|Y) = \frac{y}{2}$

3. Suponha que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias tais que  $E(X) = 5$ ,  $E(Y) = 10$ ,  $Var(X) = 9$  e  $Var(Y) = 4$ . Seja  $Z = 3X - Y + 10$ . Encontre  $E(Z)$  e  $Var(Z)$  para cada um dos casos abaixo.

- (a)  $X$  e  $Y$  são não correlacionados;
- (b)  $X$  e  $Y$  são independentes;
- (c) a correlação entre  $X$  e  $Y$  é 0,25.

*anônimo* 4. Considere uma amostra aleatória de tamanho  $n$  gerada a partir de uma distribuição com média  $\mu$ , desvio padrão  $\sigma$  e terceiro momento  $\gamma$ .

- (a) Encontre o menor valor de  $n$  com o qual, através da desigualdade de Chebyshev, podemos obter

$$Pr(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{4}) \geq 0,99;$$

- (b) Use o Teorema Central do Limite para estimar o menor valor de  $n$  que satisfaz a relação do item anterior.