Mestrado / Doutorado em Estatística, IM-UFRJ Exame de Seleção 2007

01-02-2007 Duração: 3 horas

Leia atentamente o enunciado das questões antes de responder. **Boa Sorte!**

1ª Questão: Observa-se uma amostra de tamanho n de valores independentes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, identicamente distribuídos, com densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x|y) = \begin{cases} ye^{-yx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assuma que a incerteza existente sobre o parâmetro Y, antes da observação de $X_1, X_2, \cdots, X_n$, seja adequadamente descrita pela densidade:

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1. Determine a distribuição a posteriori de Y, isto é, $f_Y(y|x_1, \cdots, x_n)$. *Dica: Para $k \geq 0$, inteiro:* $\int_0^\infty e^{-u}u^k du = k!$
2. Determine o valor esperado a posteriori para Y, $E[Y|x_1, \cdots, x_n]$, se o tamanho da amostra observada foi $n = 5$ e $\sum_{i=1}^5 x_i = 10$.

2ª Questão: O tempo de vida de determinado tipo de componente (em milhares de horas) é uma variável aleatória X cuja densidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1. Determine a função de distribuição acumulada (ou função de distribuição) de X.
2. Determine o tempo de vida mediano e o tempo de vida esperado do componente.
3. dúvidas Uma empresa que costuma fazer uso destes componentes tem uma política de manutenção: se completar c milhares de horas em funcionamento ($x = c$), o componente é retirado de uso, sendo c uma constante positiva. Determine o tempo esperado de uso do componente na empresa em questão. Compare o tempo esperado de uso na empresa à duração esperada obtida no item 2.

3ª Questão: Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y), & 0 < x < 1, \quad x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

1. $P(X < 1/2, Y < 1/2)$;
2. a covariância entre X e Y;
3. dúvidas o preditor para Y que minimiza o erro quadrático médio, ao se observar $X = x$;
4. a distribuição de $Z = XY$. Dica: Complete com $W = r_2(X, Y)$ a transformação $(X, Y) \to (Z, W)$.

4ª Questão: O tempo de vida de certo tipo de lâmpada é uma variável aleatória com média 5 horas e variância 25 horas^2. Existem, ao todo, 100 lâmpadas disponíveis para iluminar um cômodo, que devem ser utilizadas uma a uma. Assuma independência entre as durações das lâmpadas.

1. Forneça um valor aproximado para a probabilidade de que o cômodo permaneça iluminado por mais de 525 horas se, ao falhar, uma lâmpada é imediatamente substituída por outra.
2. Se o tempo para trocar cada uma das lâmpadas queimadas é uma variável aleatória com média e variância iguais a 1/3 e admitindo que os tempos de troca são independentes entre si e independentes dos tempos de vida, forneça um valor aproximado para a probabilidade de que todas as lâmpadas tenham falhado até o instante $t = 550$, se a primeira lâmpada começa a funcionar no instante $t = 0$.

Conferir *** **

5ª Questão: Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson, ou seja, com função de probabilidade:

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \frac{y^x e^{-y}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que Y é um parâmetro positivo. Admita que a densidade de probabilidade que descreve a incerteza a priori sobre Y seja:

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o valor esperado e a variância de X: $E[X]$ e $Var[X]$.

Dica: Dependendo da solução adotada, pode ser útil notar que $\sum_{u=0}^\infty \frac{y^u}{u!} = e^y$. Use a dica somente se precisar dela.