**Mestrado / Doutorado em Estatística, IM-UFRJ Exame de Seleção 2008**

11-02-2008 Duração: 3 horas

Leia atentamente o enunciado das questões antes de responder. **Boa Sorte!**

**1ª Questão:** Uma urna contém $r$ bolas vermelhas e $w$ bolas brancas. As bolas são selecionadas aleatoriamente da urna, uma-a-uma, sem reposição. Determine a probabilidade de que todas as $r$ bolas vermelhas sejam selecionadas antes de qualquer bola branca.

**2ª Questão:** Seja $X$ uma variável aleatória com densidade Uniforme no intervalo (-1,2). Define-se:

$$Y = \begin{cases} X^2, & -1 < X < 1, \\ 1 \ , & 1 < X < 2 \end{cases}$$

1. Qual tipo de variável aleatória é $Y$?
2. Determine a distribuição de $Y$.

**3ª Questão:** Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x+y), & 0 < x < 1, \quad -x < y < x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

1. $P(Y - X < -1)$;
2. a distribuição condicional de Y dado X. Mostre que esta é, de fato, uma função densidade de probabilidade para $Y$ ;
3. $P(E[Y|X] > 1/6)$.

dúvidas → **4ª Questão:** Um sistema é formado por componentes que têm funcionamentos independentes entre si. Cada componente tem sua duração $X$ (em unidade de tempo) modelada pela densidade:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Responda aos ítens (1) e (2) considerando que o sistema funcione da seguinte forma: um primeiro componente é posto em funcionamento e quando falha, um segundo é automaticamente ativado e assim por diante, havendo sempre apenas um componente operacional, até que todos falhem.

1. Se existem apenas dois componentes, determine a distribuição do tempo de duração do sistema.
2. Determine uma aproximação para a probabilidade de que o sistema dure mais que 210 horas, se este é formado por cem componentes.
3. Volte a admitir que o sistema seja formado por dois componentes. Assuma, agora, que ambos os componentes sejam postos em funcionamento simultaneamente e que o sistema funcione enquanto houver pelo menos um componente operacional. Determine a probabilidade de que o sistema funcione por mais que 3 unidades de tempo.

dúvida, 1 **5ª Questão:** Seja $X$ a variável aleatória indicadora de resultado positivo em um teste para determinada doença, de tal forma que a função de probabilidade de $X$ é dada por:

$$p(x|\theta) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $\theta$ a probabilidade de que o indivíduo tenha a doença em questão. Assuma que, antes da observação do resultado do teste, nada seja sabido sobre $\theta$, sendo tal incerteza descrita pela distribuição a priori:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a distribuição a posteriori de $\theta$, $f(\theta|x)$, e esboce seu gráfico, sob as seguintes condições:

1. se o paciente faz somente um teste e o resultado é positivo.
2. se o paciente faz dois testes independentes, um com resultado positivo e outro com resultado negativo.

Comente as diferenças entre as distribuições a posteriori obtidas nos dois ítens acima.