

Mestrado / Doutorado em estatística, IM-UFRJ
Exame de seleção 2009; duração 3 horas

QUESTÃO # 1: Considerar 3 urnas onde a urna 1 contém 2 bolas pretas e uma bola branca; a urna 2 contém 1 bola preta e 2 bolas brancas e a urna 3 contém 3 bolas pretas e 3 bolas brancas. Lançar um dado; se aparecer na face superior os números 1, 2 ou 3, selecionar a urna 1. Se aparecer 4, selecionar a urna 2. Se aparecer 5 ou 6, selecionar a urna 3. Daí, retirar aleatoriamente uma bola da urna selecionada. Achar a probabilidade de que a urna 2 foi selecionada dado que saiu uma bola branca.

QUESTÃO # 2 (a) Lançar um dado honesto 2 vezes; seja X uma variável aleatória representando a soma dos valores obtidos na face superior. Achar a f.d. $F(x)$.
 (b) Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p. dada por $f(x) = x$ se $0 < x \leq 1$; $f(x) = 2 - x$ se $1 < x \leq 2$ e $f(x) = 0$ e.o.p. Achar a f.d. $F(x)$ e $P(0,3 < X \leq 1,5)$.

QUESTÃO # 3 (a) Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial $b(n,p)$ e seja Y outra variável aleatória com mesma distribuição binomial $b(n,p)$ e independente de X ;
 (i) Achar a distribuição de $Z = X + Y$; (ii) Achar a distribuição conjunta de $U = X/(Y + 1)$ e $V = Y + 1$.
 (b) Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com f.p. dada por:

| | | | | |
|----------|----------|---------|---------|------|
| | $X = -1$ | $X = 0$ | $X = 1$ | |
| $Y = -2$ | 1/6 | 1/12 | 1/6 | 5/12 |
| $Y = 1$ | 1/6 | 1/12 | 1/6 | 5/12 |
| $Y = 2$ | 1/12 | 0 | 1/12 | 2/12 |
| | 5/12 | 1/6 | 5/12 | 1 |

(i) Achar a f.p. conjunta para $U = |X|$ e $V = Y^2$.
 (ii) Achar as f.p. marginais para U e V .

QUESTÃO # 4 Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias contínuas independentes com f.d.p. $f(x_i) = 1, 0 < x_i < 1, i = 1, 2$. (a) Achar a f.d.p. conjunta para $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.
 (b) Achar as f.d.p. marginais para Y_1 e Y_2 .

QUESTÃO # 5 (a) Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com f.d.p. $f(x,y) = 2, 0 < x < y < 1$. (i) Achar as f.d.p. condicionais $f(y/x)$ e $f(x/y)$. (ii) Achar $E(Y/X=x)$; $E(X/Y=y)$; $\text{var}(Y/X=x)$ e $\text{var}(X/Y=y)$.
 (b) Supor X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias contínuas independentes com f.d.p. $f(x) = x \exp(-x), x > 0$. Seja $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. (i) Achar a f.d.p. condicional de Y_1 dado $Y_n = y_n$. (ii) Achar a f.d.p. da amplitude $W = Y_n - Y_1$.