

**Exame de Seleção 2010**  
**Mestrado/Doutorado em Estatística**  
 IM-UFRJ

**Duração:** 3 horas.

Leia atentamente o enunciado das questões antes de responder.

- (1) A urna 1 contém 30 bolas vermelhas e 40 bolas negras. A urna 2 contém 41 bolas vermelhas e 32 bolas negras. Inicialmente retiramos aleatoriamente uma bola da urna 1 e, sem olhar para sua cor, a colocamos na urna 2. Depois, retiramos aleatoriamente uma bola da urna 2 e, sem olhar para sua cor, a colocamos na urna 1. Após este procedimento escolhemos aleatoriamente uma bola da urna 1. Qual a probabilidade de que a bola escolhida em última instância seja vermelha?
- (2) Dois números são escolhidos independente e aleatoriamente do intervalo  $[0, 1]$ . É informado que o menor dos números é menor que  $\frac{1}{3}$ . Qual a probabilidade de que o maior dos números seja maior que  $\frac{3}{4}$ ?
- (3) Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório com densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) Calcule  $\mathbb{E}[Y|X = x]$ .  
 (b) Encontre o valor de  $\mathbb{E}[XY]$ .

*dividido*  
 2007  
 5º Questão

- (4) Suponha que a intensidade da chuva em um determinado campus universitário seja uma variável aleatória  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ . Suponha, também, que dado  $X = x$ , o número de gotas  $Y$  que caem no campus tenha distribuição Poisson de parâmetro  $x$ , isto é

$$\mathbb{P}[Y = y|X = x] = e^{-x} \frac{x^y}{y!}.$$

- (a) Encontre a distribuição do número de gotas caídas no campus.  
 (b) Calcule o valor esperado do número de gotas caídas no campus.

- ~~XXX~~ (5) João vai ao casino com um capital inicial de 5000 dolares. A cada aposta ele ganha 10 dolares com probabilidade  $\frac{1}{2}$  ou perde 10 dolares com probabilidade  $\frac{1}{2}$ . Seja  $C_n$  o capital do apostador após realizar  $n$  apostas independentes.

- (a) Calcule  $\mathbb{P}[C_n \geq 5000 \text{ para } 1 \leq n \leq 4]$ .  
 (b) Verifique que

$$\mathbb{P}[C_8 = 5050|C_3 = 5020, C_6 = 5040] = \mathbb{P}[C_8 = 5050|C_6 = 5040] = \mathbb{P}[C_2 = 5010].$$

- (c) Aproxime, utilizando o Teorema Central do Limite, a probabilidade do capital ser maior que 5168 dolares após 64 apostas.

- (6) Sejam  $Z$  e  $W$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ . Sejam  $U$  e  $V$  variáveis aleatórias definidas por  $U = \min\{Z, W\}$  e  $V = \max\{Z, W\}$ . É possível mostrar que

$$f(u, v) = \begin{cases} 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}, & \text{se } 0 < u < v \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) Calcule, utilizando o método do Jacobiano, a densidade conjunta de  $(U, V - U)$ .  
 (b) Mostre que  $V - U$  tem distribuição exponencial. Determine seu parâmetro.  
 (c)  $U$  e  $V - U$  são independentes?