

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós Graduação em Estatística
Exame de Seleção 2013 - Duração: 2h30
06/02/2013.

1ª. Questão :

Suponha que uma urna contenha v bolas vermelhas e b brancas. Suponha também que as bolas são retiradas, aleatoriamente, uma de cada vez e sem reposição. Qual é a probabilidade de que todas as v bolas vermelhas serão obtidas antes da obtenção de duas bolas brancas?

2ª. Questão :

Suponha que quando uma máquina está ajustada de forma adequada, 50% dos itens produzidos por ela são de alta qualidade e, os outros 50%, são de qualidade média. Suponha, entretanto, que a máquina é ajustada de forma inadequada durante 10% do tempo e, sob essas condições, 25% dos itens produzidos são de alta qualidade e 75% de qualidade média.

Suponha que 5 itens produzidos pela máquina, num certo instante, são selecionados aleatoriamente e inspecionados. Se 4 desses itens são de alta qualidade e 1 de média, qual é a probabilidade de que a máquina tenha sido ajustada de forma adequada neste instante?

3ª. Questão :

(a) Suponha que X e Y são variáveis aleatórias i.i.d's, e cada uma possui a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sejam $U = X/(X + Y)$ e $V = X + Y$.

(i) Determine a fdp conjunta de U e V .

(ii) U e V são independentes?

(iii) Suponha que as variáveis aleatórias X , Y e Z tenham a seguinte fdp conjunta:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \text{ e } 0 < z < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine $P(3X > Y \mid 1 < 4Z < 2)$.

4ª. Questão :

(i) Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes cujas variâncias existem e $E(X) = E(Y)$. Mostre que $E[(X - Y)^2] = Var(X) + Var(Y)$.

(ii) Suponha que X_0, X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes, cada uma com a mesma variância σ^2 . Seja $Y_j = X_j - X_{j-1}$ para $j = 1, \dots, n$ e seja $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$. Determine o valor de $Var(\bar{Y}_n)$.

***** 5ª. Questão (apenas para os candidatos ao doutorado):**

Suponha que um ponto é escolhido aleatoriamente em um graveto de comprimento um. Suponha ainda que o graveto é partido em duas partes neste ponto. Encontre o valor esperado do comprimento do pedaço maior.