Exame de Seleção 2019
Pós Graduação em Estatísica
Departamento de Métodos Estatísticos - UFRJ

11 de fevereiro de 2019

1. Um grupo de 360 pessoas vai ser dividido em 120 times de 3 pessoas cada (onde a ordem dos times e a ordem dentro de um time não importa).

   (a) De quantas maneiras essa divisão pode ser feita?

   (b) O grupo de 360 pessoas é constituído por 180 casais e uma divisão aleatória desse grupo em times de 3 pessoas é escolhida, com todas as divisões igualmente prováveis. Encontre o número esperado de times contendo um casal.

   Solução:

   (a) Para compor o primeiro time de 3 pessoas temos $\binom{360}{3}$ diferentes possibilidades. Assumindo que já foram formados $1 \leq i < 120$ times, restam $360 - 3i$ pessoas para compor o (i+1)-ésimo time de 3 pessoas. Logo, podemos compor o (i+1)-ésimo time de $\binom{360-3i}{3}$ maneiras distintas. Pelo princípio da multiplicação, podemos dividir as 360 pessoas em times de 3 pessoas (onde a ordem dos times importa) de $\prod_{i=0}^{119} \binom{360-3i}{3} = \frac{360!}{(3!)^{120}}$ maneiras diferentes. Para uma dada escolha dos 120 times, podemos ordena-los de 120! maneiras distintas. Assim, o número de maneiras que existem para dividir 360 pessoas em times de 3 pessoas quando ordem dos times não importa é

   $$\frac{360!}{(3!)^{120} 120!}$$

   (b) Para cada $1 \leq j \leq 120$, seja I_j o indicador de que o j-ésimo time contem um casal (assumindo que os times são formados um de cada vez ou com relação a alguma ordenação aleatória.) Pela linearidade da esperança e como todos os times têm a mesma chance de conter um casal, o número esperado de times contendo um casal é dado por $120\mathbb{E}(I_1)$. Agora

   $$\mathbb{E}(I_1) = \mathbb{P}(\text{o primeiro time contem um casal}) = \frac{(180)(358)}{\binom{360}{3}},$$

   pois qualquer trio de pessoas tem a mesma chance de pertencer ao primeiro time e para se ter um casal num time de 3 pessoas devemos escolher um casal e uma terceira pessoa. Portanto, número esperado de times contendo um casal é dado por

   $$\frac{(120)(180)(358)}{\binom{360}{3}}.$$

2. Um novo tratamento para uma doença está sendo testado a fim de verificar se sua eficácia é maior que a do tratamento padrão. Sabe-se que o tratamento padrão é efetivo em 50% dos pacientes. Acredita-se, inicialmente, que exista 2/3 de chance de que o novo tratamento seja efetivo em 60% dos pacientes e 1/3 de chance de que o novo tratamento tenha a mesma eficácia do tratamento padrão. Em um estudo piloto com 20 pacientes selecionados ao acaso, verificou-se que o novo tratamento foi efetivo para 15 dos pacientes.

   (a) Dado essa informação, qual é a probabilidade de que o novo tratamento seja mais eficaz que o tratamento padrão?

(b) Um segundo estudo é então feito, com um novo conjunto de 20 pacientes. Qual é a função massa de probabilidade do número de pacientes desse segundo estudo para os quais o novo tratamento é efetivo, dado os resultados do primeiro estudo? (Se p denota a resposta do item (a), a sua resposta pode ser deixada em termos de p.)

Solução:

(a) Sejam B o evento que o novo tratamento é melhor do que o tratamento padrão e X o número de pessoas do estudo piloto para os quais o tratamento é efetivo. Pela Regra de Bayes e a Lei de Probabilidade Total,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|X=15) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(X=15|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(X=15|B)+\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(X=15|B^c)} \\ &= \frac{(2/3)\binom{20}{15}(0.6)^{15}(0.4)^5}{(2/3)\binom{20}{15}(0.6)^{15}(0.4)^5+(1/3)\binom{20}{15}(0.5)^{20}}.\end{aligned}$$

(b) Seja Y o número de pacientes do segundo estudo para os quais o tratamento é efetivo e denote $p=\mathbb{P}(B|X=15)$. Para cada $0 \leq k \leq 20$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k|X=15) &= \mathbb{P}(B|X=15)\mathbb{P}(Y=k|X=15,B)+\mathbb{P}(B^c|X=15)P(Y=k|X=15,B^c) \\ &= p\binom{20}{k}(0.6)^k(0.4)^{20-k}+(1-p)\binom{20}{k}(0.5)^{20},\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de que dado a informação da eficácia do novo tratamento, a informação do estudo piloto é irrelevante.

3. Um número Poi(λ) de eleitores votam em um segundo turno de uma eleição. Cada eleitor vota no Candidato A com probabilidade p e no Candidato B com probabilidade $q=1-p$, independentemente dos outros eleitores. Sejam X o número de votos do Candidato A e Y o número de votos do Candidato B, e defina a diferença em votos $D=X-Y$.

(a) Encontre a função massa de probabilidade conjunta de X e Y.

(b) Determine $\mathbb{E}(D)$ e $\text{Var}(D)$.

Solução:

(a) Seja $N=X+Y$ o número total de eleitores que votaram no segundo turno e note que para todos $x,y \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x,Y=y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(X=x,Y=y|N=n) \\ &= \mathbb{P}(N=x+y)\mathbb{P}(X=x,Y=y|N=x+y) \\ &= \mathbb{P}(N=x+y)\mathbb{P}(X=x|N=x+y) \\ &= \frac{(x+y)!}{x!y!}p^x q^y\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+y}}{(x+y)!} \\ &= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^x}{x!}\frac{e^{-q\lambda}(q\lambda)^y}{y!}.\end{aligned}$$

Em particular, $X \sim \text{Poi}(p\lambda)$ e $Y \sim \text{Poi}(q\lambda)$. Além disso, X e Y são independentes.

(b) Do item anterior temos que $X \sim \text{Poi}(\lambda p)$ e $Y \sim \text{Poi}(\lambda p)$ independentes. Logo, $\mathbb{E}(D)=\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)=\lambda(p-q)$ e

$$\text{Var}(D)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)=\lambda(p+q)=\lambda.$$

4. Considere um vetor aleatório (X,Y) com distribuição Normal bivariada tal que $X \sim \text{N}(0,1)$, $Y \sim \text{N}(1,4)$ e $\text{Cor}(X,Y)=\rho$, onde $-1<\rho<1$.

(a) Construa uma variável aleatória com distribuição Exp(1) como função de X.

(b) Mostre que o vetor $(2X+Y, X-Y/2)$ tem distribuição Normal bivariada.

(c) Encontre a função de densidade conjunta de $2X+Y$ e $X-Y/2$.

Solução:

(a) Seja Φ a função distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão. Sabemos então que $\phi(X) \sim \text{Unif}(0,1)$. Para simular uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro 1 basta então considerar a variável aleatória $-(\log(1-\phi(X)))$.

(b) Precisamos mostrar que para quaisquer constantes reais a e b a v.a. $a(2X+Y)+b(X-Y/2)$ tem distribuição normal. Para esse fim, basta observar que

$$a(2X+Y)+b(X-Y/2) = (2a+b)X + (a-b/2)Y$$

e o par (X,Y) é um vetor aleatório normal bivariado, de modo que qualquer combinação linear das v.a.s X e Y tem distribuição normal.

(c) Note que, $\text{Cov}(X,Y) = 2\rho$, $2X+Y \sim \text{N}(1, 8(1+\rho))$, $X-Y/2 \sim \text{N}(-1/2, 2(1-\rho))$ e $\text{Cov}(2X+Y, X-Y/2) = 2\text{Var}(X) - \text{Cov}(X,Y) + \text{Cov}(X,Y) - \text{Var}(Y)/2 = 2(1)-(4)/2 = 0$. Como o vetor $(2X+Y, X-Y/2)$ é normal normal bivariado, segue que as v.a.s $2X+Y$ e $X-Y/2$ são independentes. Logo para obter a função de densidade conjunta $(2X+Y, X-Y/2)$ basta multiplicar as funções de densidades marginais:

$$f_{2X+Y, X-Y/2}(x,y) = f_{2X+Y}(x) f_{X-Y/2}(y).$$

5. Seja $U_1, U_2, U_3, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em $[0,1]$, isto é, $U_i \sim \text{Unif}(0,1)$ para todo $i \geq 1$.Usando uma sequência $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de números reais satisfazendo $0 < p_i \leq 1$ para todo $i \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, considere a sequência $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de variáveis aleatórias onde para cada $i \geq 1$,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se } U_i \leq p_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que a sequência $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de variáveis aleatórias converge em probabilidade para 0.

Solução: Temos que mostrar que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0$ para todo $\epsilon > 0$. Para $\epsilon \geq 1$ o resultado é imediato. Para $0 < \epsilon < 1$, temos $\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(U_n \leq p_n) = p_n$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} p_n = 0,$$

e o resultado segue.