PERCOLAÇÃO: Problemas fáceis de entender e “difíceis” de resolver

Bernardo Nunes Borges de Lima
Departamento de Matemática
ICEx-UFMG

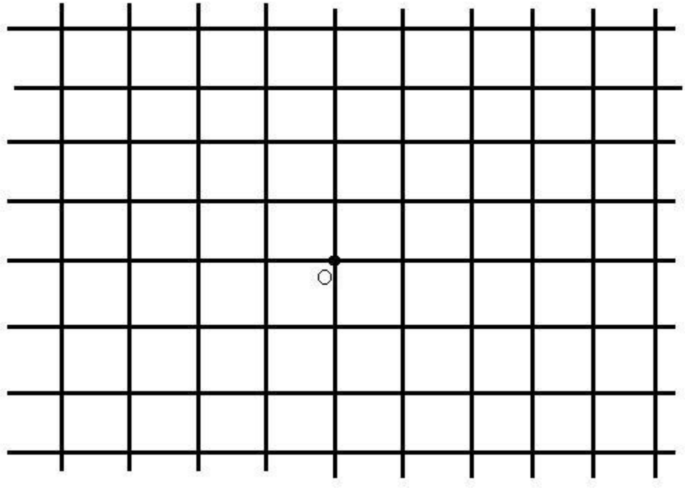
UFRJ, outubro de 2023

Aurélio Percolação : [lat Percolatione] Operação de passar um líquido através de um meio poroso para filtrá-lo ou para extrair substâncias deste meio.

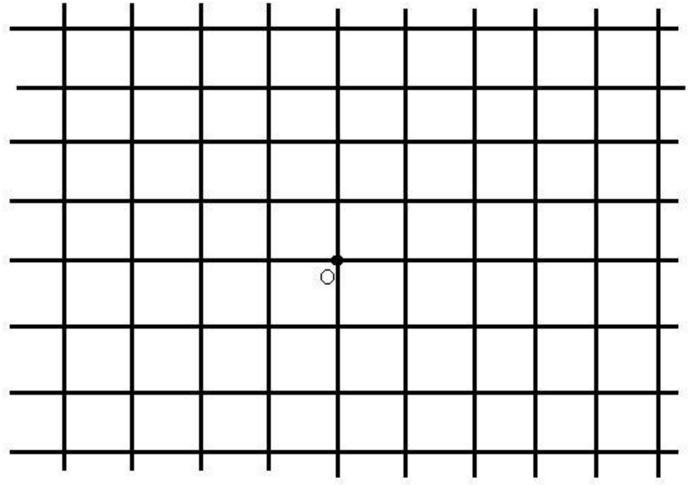
Houaiss Percolação : QUÍM m.q. Lixiviação ETIM lat percolatio ação de filtrar.

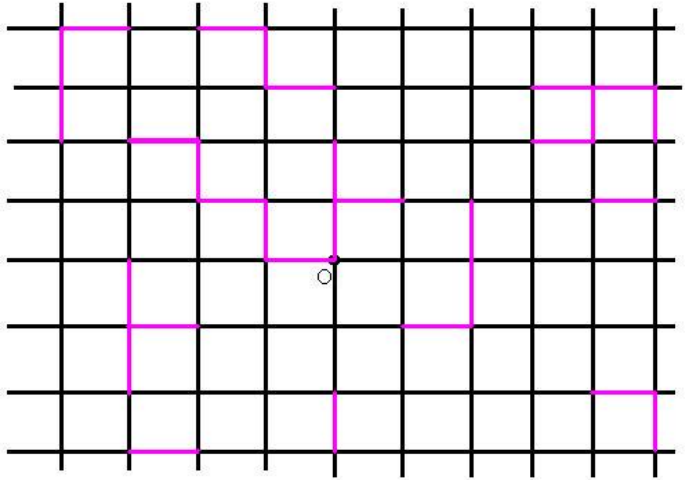
1941 Flory, P.J. Molecular size distribution in three dimension gelation I-III, *Journal of American Chemical Society* 63, 3083-3100.

1957 Broadbent, S.R., Hammersley, J.M. Percolation Precesses I. Cristals and Mazes, *Proceedings of the Cambridge Mathematical Society* 53, 629-641.



Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito, localmente finito, onde $\mathbb{V}$ e $\mathbb{E}$ são os conjuntos de vértices e elos de G, respectivamente. Dado o parâmetro $p \in [0, 1]$, a cada elo associamos uma variável aleatória que assume os valores 0 (fechado) ou 1 (aberto)com probabilidades $1 - p$ e p, respectivamente.
Considerando que todos os elos estão abertos ou fechados independentemente, o espaço de probabilidade que descreve o modelo é $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, onde $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\text{cilindros})$ e $P = \prod_{e \in \mathbb{E}} b_p$, onde b_p é a medida de Bernoulli de parâmetro p.
Este é o modelo de Percolação de Bernoulli com parâmetro p.

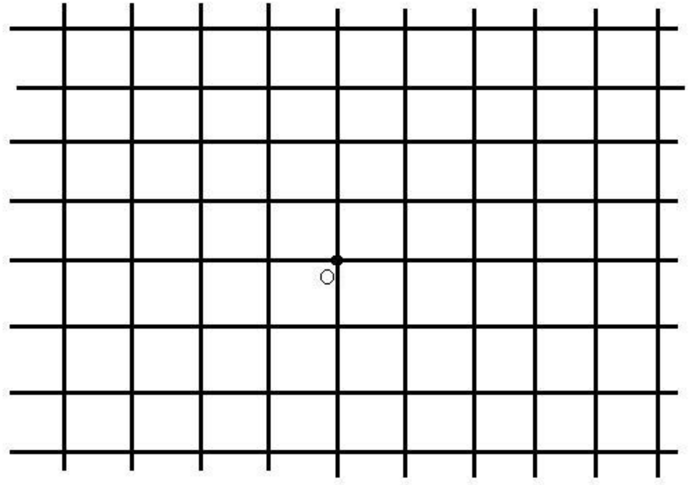


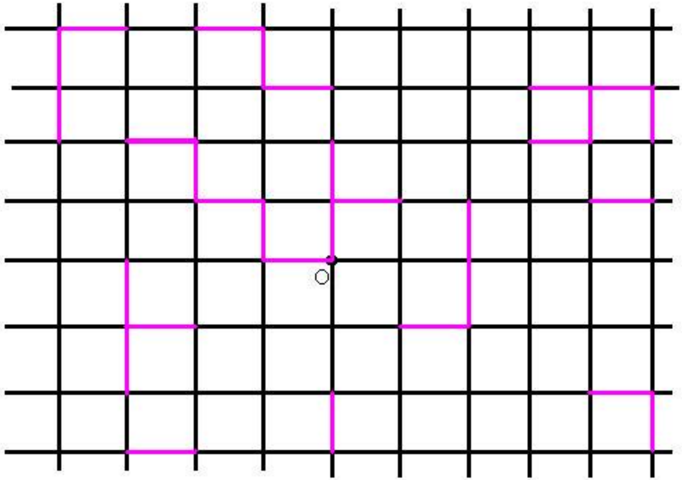


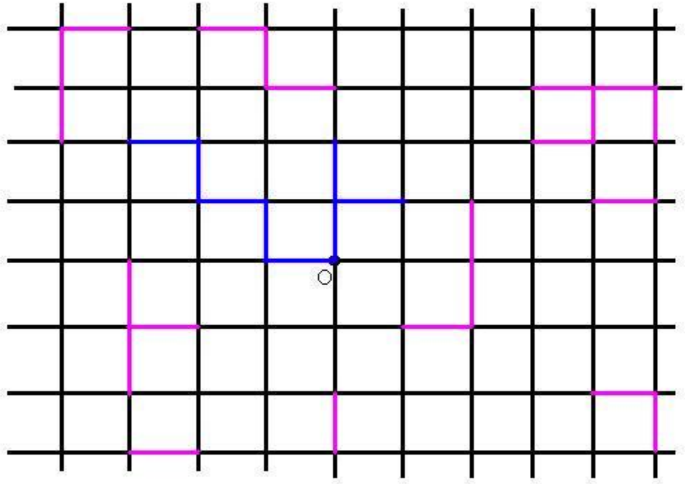
Inicialmente, a pergunta de interesse é sobre o comportamento do conjunto de vértices que está conectado à origem por um caminho de elos abertos. Mais precisamente, para cada $x \in \mathbb{V}$ seja

$$C_x = \{y \in \mathbb{V}; y \leftrightarrow x\}.$$

O conjunto C_x é o aglomerado de x.




O


O

A primeira pergunta a respeito dos aglomerados é sobre a sua cardinalidade, isto é, dado o vértice x, qual a distribuição da variável aleatória

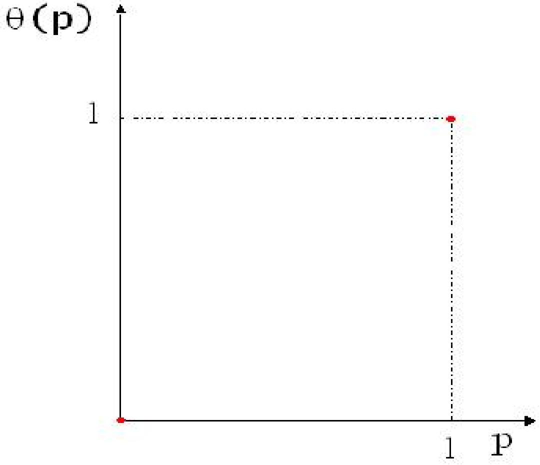
$$\#C_x : \Omega \to \mathbb{N} \cup \infty$$

Em grafos como $\mathbb{Z}^d$, as variáveis aleatórias $\#C_x$ têm a mesma distribuição para todo $x \in \mathbb{V}$, portanto podemos concentrar as atenções no aglomerado da origem, C_0, que será denotado simplesmente por C. Usaremos também a notação $(0 \leftrightarrow \infty)$ para o evento $\{\omega \in \Omega; \#C = +\infty\}$.

A FUNÇÃO $\theta(p)$

$$\theta(p) : [0,1] \to [0,1]$$

$$p \mapsto P_p(0 \leftrightarrow \infty)$$


θ(p)
1
1
p

O PONTO CRÍTICO

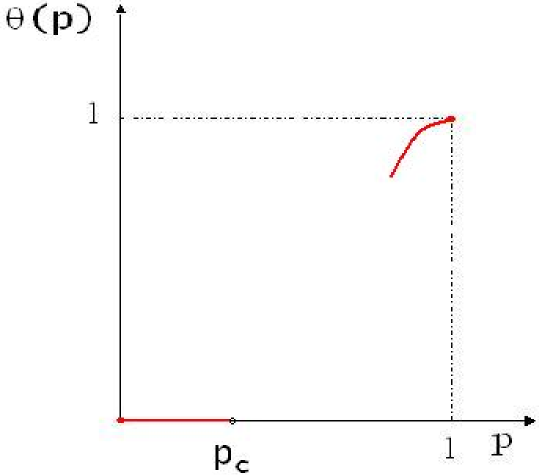
Dado que $\theta(p)$ é não decrescente, quando $\theta(p)$ deixa de se anular?

$$p_c = \sup\{p \in [0,1]; \theta(p) = 0\}$$

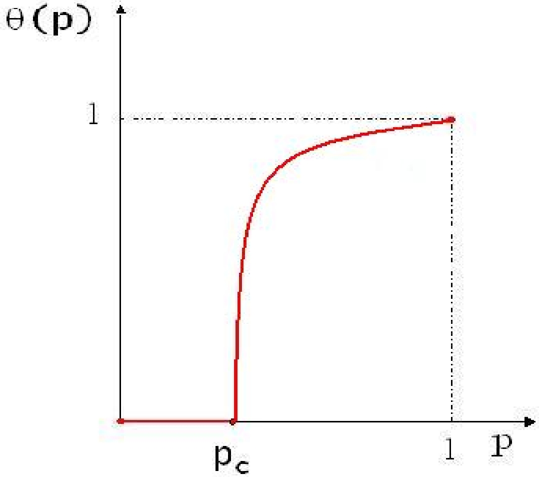
Teorema (Broadbent, Hammersley)

Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ *, onde* $G = \mathbb{Z}^d$*,* $d \geq 2$*. Então, existe um ponto crítico* $p_c(d) \in (0,1)$ *tal que*

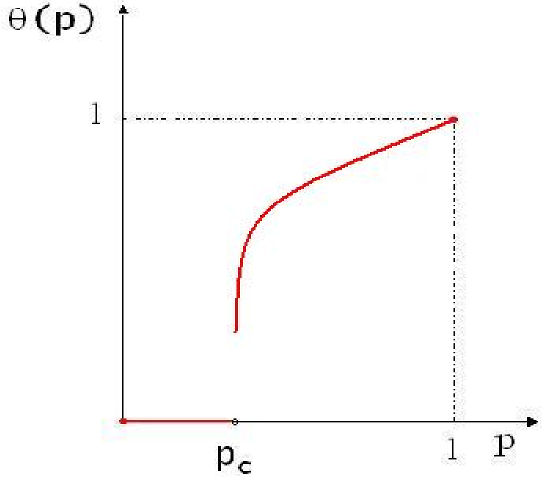
$$\theta(p) \begin{cases} = 0 \ , & p < p_c(d) \\ > 0 \ , & p > p_c(d). \end{cases} \tag{1}$$


θ(p)
1
p_c
1
p

E no ponto crítico? $\theta(p_c) = 0$?



E no ponto crítico? $\theta(p_c) \neq 0$?



E no ponto crítico?

Em $\mathbb{Z}^2$, foi provado por H. Kesten (1980) que $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.

E no ponto crítico?

Em $\mathbb{Z}^2$, foi provado por H. Kesten (1980) que $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.

E nas outras dimensões? $\theta(p)$ é descontínua em p_c?

E no ponto crítico?

Em $\mathbb{Z}^2$, foi provado por H. Kesten (1980) que $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.

E nas outras dimensões? $\theta(p)$ é descontínua em p_c?

T. Hara e G. Slade (1991) mostram a continuidade em p_c se $d \geq 19$;

E no ponto crítico?

Em $\mathbb{Z}^2$, foi provado por H. Kesten (1980) que $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.

E nas outras dimensões? $\theta(p)$ é descontínua em p_c?

T. Hara e G. Slade (1991) mostram a continuidade em p_c se $d \geq 19$;

Posteriormente, R. Fitzner e R. van der Hofstad (2017) estendem para $d \geq 10$.

E no ponto crítico?

Em $\mathbb{Z}^2$, foi provado por H. Kesten (1980) que $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(\frac{1}{2}) = 0$.

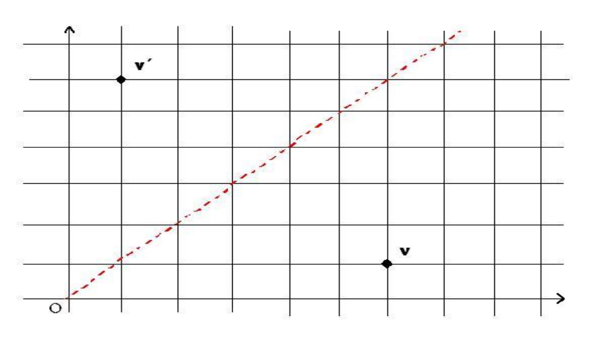
E nas outras dimensões? $\theta(p)$ é descontínua em p_c?

T. Hara e G. Slade (1991) mostram a continuidade em p_c se $d \geq 19$;

Posteriormente, R. Fitzner e R. van der Hofstad (2017) estendem para $d \geq 10$.

E nas outras dimensões? Em particular em $d = 3$???!!!

Modelo anisotrópico $p_v \neq p_h \in [0, 1]$

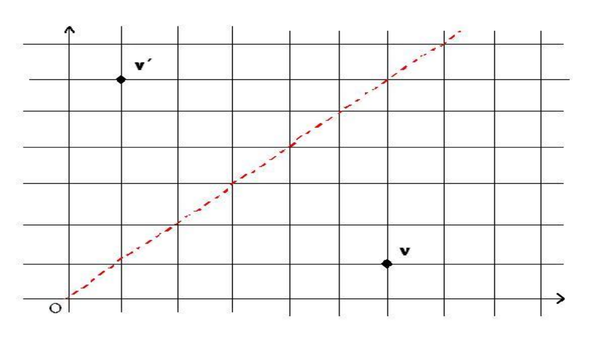


Suponha $p_v \geq p_h$, podemos afirmar que

$$P(0 \leftrightarrow v') \geq P(0 \leftrightarrow v)?$$

Respostas afirmativas em determinadas regiões dos parâmetros p_v e p_h (., A. Procacci, 2004).

Modelo anisotrópico $p_v \neq p_h \in [0,1]$



Suponha $p_v \geq p_h$, podemos afirmar que

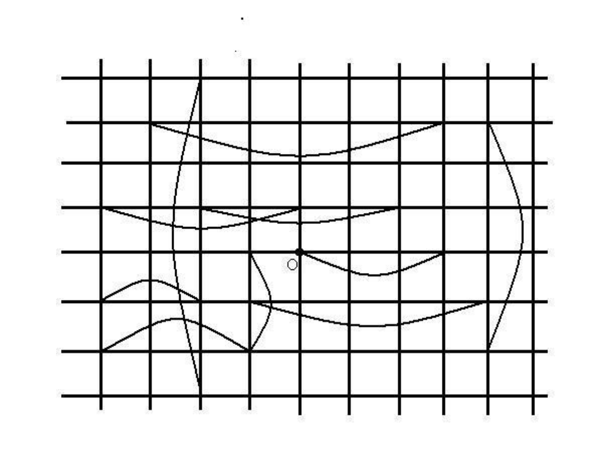
$$P(0 \leftrightarrow v') \geq P(0 \leftrightarrow v)?$$

Respostas afirmativas em determinadas regiões dos parâmetros p_v e p_h (., A. Procacci, 2004).

E no caso geral???!!!

Percolação de Longo Alcance: o problema do truncamento

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n, \cdots \in [0,1]$, onde p_n é a probabilidade de um elo de tamanho n estar aberto. Elos estão abertos de modo independente.



Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$, neste caso o Lema de Borel Cantelli garante que $P(0 \leftrightarrow \infty) = 1$.

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$, neste caso o Lema de Borel Cantelli garante que $P(0 \leftrightarrow \infty) = 1$.

Pergunta: Existe $k > 0$ inteiro, tal que a origem continua a percolar se suprimirmos todos os elos de alcance superior a k?

Esta é a questão do truncamento, para a qual existem alguns resultados parciais.

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$, neste caso o Lema de Borel Cantelli garante que $P(0 \leftrightarrow \infty) = 1$.

Pergunta: Existe $k > 0$ inteiro, tal que a origem continua a percolar se suprimirmos todos os elos de alcance superior a k?

Esta é a questão do truncamento, para a qual existem alguns resultados parciais.

Como por exemplo, a resposta afirmativa dada por Sidoravicius, Surgailis e Vares (1999) em $d = 2$, se $p_n \geq \frac{1}{n \log n}$, para todo n suficientemente grande.

Em particular no caso de interações lacunares, temos que o problema do truncamento tem resposta afirmativa nos seguintes casos

- Em $d \geq 2$, se $\limsup p_n > 0$ (S. Friedli, ., V. Sidoravicius, 2004);
- Em $d \geq 3$ (S. Friedli, ., 2006).

O caso geral em $d = 2$ ainda é um problema em aberto.

Em particular no caso de interações lacunares, temos que o problema do truncamento tem resposta afirmativa nos seguintes casos

- Em $d \geq 2$, se $\limsup p_n > 0$ (S. Friedli, ., V. Sidoravicius, 2004);
- Em $d \geq 3$ (S. Friedli, ., 2006).

O caso geral em $d = 2$ ainda é um problema em aberto. Novos casos com resposta afirmativa também são obtidos quando

- $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) < +\infty$ (., A. Sapozhnikov, 2008);
- $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \infty$ (A.M. Campos, ., 2022).